0 預備數學

0-1 實數的性質

在微積分以前的數學，實數就已經使用得相當廣泛了。若自然數全體所成的集合記為 $\mathbb{N}$，整數全體所成的集合記為 $\mathbb{Z}$，有理數全體所成的集合記為 $\mathbb{Q}$，而實數全體所成的集合記為 $\mathbb{R}$，則可知

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

今於直線上任取一點，以表實數 0，稱為**原點**，並另取一點以表實數 1，稱為**單位點**，直線上以原點為起點，我們規定指向單位點的方向稱為**正方向**，另一方向為**負方向**. 以原點和單位點為基準，並取單位長度作為量測距離. 對於每一實數，我們能在直線上賦予一點如下：

- 對每一正數 r，在正方向賦予一點使其與原點的距離為 r 單位.
- 對每一負數 $-r$，在負方向賦予一點使其與原點的距離為 r 單位.
- 對數值 0 賦予原點.

於是，直線上的每一點恰有一實數代表它，而每一實數亦恰有直線上的一點與它對應，這一佈滿實數的直線就稱為**實數線**，或簡稱為**實數**，或有時稱為**坐標線**. 很顯然地，從實數與坐標線上之點的關係，我們可知實數與坐標線上的點是一一對應.

若我們沿著坐標線的正方向，則數值增加. 實數是有大小次序的；換句話說，已知任意兩實數 a 與 b，則下列恰有一者成立：

a 小於 b

b 小於 a

a 等於 b

欲描述兩實數的大小，我們使用次序符號 $<$ (小於) 與 $\leq$ (小於或等於)，定義如下：

定義 0-1

若 a 與 b 皆為實數，則不等式 $a<b$ (唸成“a 小於 b”) 表示 $b-a$ 為正；不等式 $a\leq b$ (唸成“a 小於或等於 b”) 表示 $a<b$ 或 $a=b$.

$a<b$ 也可寫成 $b>a$ (唸成“b 大於 a”)，而 $a\leq b$ 也可寫成 $b\geq a$ (唸成“b 大於或等於 a”). 在幾何上，$a<b$ 說明了在坐標線上，a 位於 b 的左邊. 設 a、b 與 c 皆為實數，當 $a<b$ 且 $b<c$ 時，我們寫成 $a<b<c$. 在幾何上，$a<b<c$ 說明了在坐標線上，b 位於 a 的右邊，而 c 位於 b 的右邊.

符號 $a<b\leq c$ 意指 $a<b$ 且 $b\leq c$，其餘符號 $a\leq b<c$、$a\leq b\leq c$ 與 $a<b<c<d$ 等等的涵義留給讀者去思考.

關於實數的次序關係，有下列的基本性質：

定理 0-1

設 a、b、c 與 d 皆為實數.

(1) 若 $a<b$ 且 $b<c$，則 $a<c$.

(2) 若 $a<b$，則 $a+c<b+c$.

(3) 若 $a<b$，則 $a-c<b-c$.

(4) 若 $a<b$ 且 $c<d$，則 $a+c<b+d$.

(5) 若 $a<b$ 且 $c>0$，則 $ac<bc$.

(6) 若 $a<b$ 且 $c<0$，則 $ac>bc$.

(7) 若 $0<a<b$，則 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.

另外有關絕對值的觀念在微積分上十分有用，必須深熟其技巧. 定義 a 的絕對值，記為 $|a|$，如下：

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{當 } a\geq 0 \\ -a, & \text{當 } a<0 \end{cases}$$

並由此定義得知，對任意 $a\in \mathbb{R}$ 而言，恆有

$$\sqrt{a^2}=|a|.$$

由幾何的觀點而言，$|a|$ 表數線上坐標為 a 之點與原點的距離. 一般而言，坐標線上任意兩點 a、b 的距離為 $|a-b|$.

定理 0-2　絕對值的性質

設 a、$b\in \mathbb{R}$，則

(1) $|a|=|-a|$

(2) $|ab|=|a||b|$

(3) $|a^2|=|a|^2$

(4) $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$，$b\neq 0$

(5) $-|a|\leq a\leq |a|$

(6) $|a|\leq r \Leftrightarrow -r\leq a\leq r$ $(r\geq 0)$

(7) $|a|\geq r \Leftrightarrow a\geq r$ 或 $a\leq -r$ $(r\geq 0)$

(8) $|a+b|\leq |a|+|b|$ (三角不等式)

(9) $|a-b|\geq ||a|-|b||$

設 a 與 b 皆為實數且 $a<b$，則下面數線上的點集合 (或各實數的集合) 皆稱為

有限區間，a、b 稱為其端點.

開區間：$(a, b)=\{x \mid a<x<b\}$

閉區間：$[a, b]=\{x \mid a \le x \le b\}$

半開（或半閉）區間：$(a, b]=\{x \mid a<x \le b\}$

半閉（或半開）區間：$[a, b)=\{x \mid a \le x<b\}$

同理，我們稱下面的集合為無限區間．設 $a \in \mathbb{R}$，則

$$[a, \infty)=\{x \mid x \ge a\}$$
$$(a, \infty)=\{x \mid x>a\}$$
$$(-\infty, a]=\{x \mid x \le a\}$$
$$(-\infty, a)=\{x \mid x<a\}$$
$$(-\infty, \infty)=\{x \mid x \in \mathbb{R}\}$$

例如，$(1, \infty)$ 表示所有大於 1 的實數，符號 ∞ 表示“無限大”，僅為一符號而已，並非一個實數.

例題 1 解不等式 $|3-2x| \le |x+4|$.

解

$$|3-2x| \le |x+4| \Rightarrow \sqrt{(3-2x)^2} \le \sqrt{(x+4)^2}$$
$$\Rightarrow (3-2x)^2 \le (x+4)^2 \Rightarrow 9-12x+4x^2 \le x^2+8x+16$$
$$\Rightarrow 3x^2-20x-7 \le 0 \Rightarrow (x-7)(3x+1) \le 0$$
$$\Rightarrow -\frac{1}{3} \le x \le 7$$

故解集合為 $\left\{x \,\middle|\, -\frac{1}{3} \le x \le 7\right\}=\left[-\frac{1}{3}, 7\right]$.

0-2 坐標平面

正如直線上的點與實數構成一一對應一樣，平面上的點也與利用交於原點的兩垂直

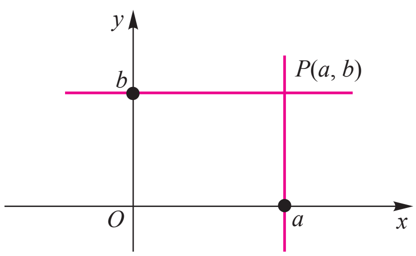
坐標線所成實數對構成一一對應．通常，其中一條直線為水平而向右為正方向，另一條直線為垂直而向上為正方向；兩直線稱為**坐標軸**，其中水平線稱為 **x-軸**，垂直線稱為 **y-軸**，兩坐標軸合併形成所謂的**直角坐標系**或**笛卡兒坐標系**，兩坐標軸的交點記為 O，稱為坐標系的**原點**.

引進直角坐標系的平面稱為**坐標平面**或**笛卡兒平面**，而分別使用 x 與 y 標記水平軸與垂直軸的坐標平面稱為 **xy-平面**．若 P 是坐標平面上的點，則我們畫出通過 P 的兩條直線，一條垂直於 x-軸，而另一條垂直於 y-軸．若第一條直線交 x-軸於具有坐標 a 的點，而第二條直線交 y-軸於具有坐標 b 的點，則我們對於 P 賦予有序數對 (a, b)．數 a 稱為 P 的 **x-坐標**或**橫坐標**，而數 b 稱為 P 的 **y-坐標**或**縱坐標**；我們稱 P 為具有坐標 (a, b) 的點，記為 $P(a, b)$，如圖 0-1 所示.

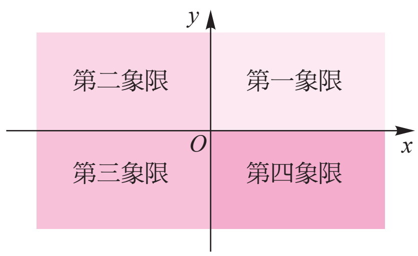
在坐標平面上的每一點決定唯一的有序數對．反之，我們以一對實數 (a, b) 開始，作出垂直 x-軸於具有坐標 a 之點的直線，垂直 y-軸於具有坐標 b 之點的直線；這兩條直線的交點決定了在坐標平面上具有坐標 (a, b) 的唯一點 P．於是，在有序數對與坐標平面上之點間有一個一一對應.

兩坐標軸將平面分成四個部分，稱為**象限**，分別為第一象限、第二象限、第三象限與第四象限．x-坐標與 y-坐標皆為正的點位於第一象限，具有負的 x-坐標與正的 y-坐標的點位於第二象限，x-坐標與 y-坐標皆為負的點位於第三象限，具有正的 x-坐標與負的 y-坐標的點位於第四象限，如圖 0-2 所示.

一個僅含兩變數 x 與 y 的方程式的圖形 (或稱平面曲線) 為滿足該方程式的所有有序數對 (x, y) 所組成的集合．若圖形具有某對稱性質，則作方程式圖形所需的工作可簡化．今提出下面的**對稱性檢驗法**.



✦ **圖 0-1**



✦ **圖 0-2**

定理 0-3 對稱性檢驗法

(1) 若在平面曲線的方程式中以 $-x$ 代 x，可得同樣的方程式，則曲線對稱於 y-軸.

(2) 若在平面曲線的方程式中以 $-y$ 代 y，可得同樣的方程式，則曲線對稱於 x-軸.

(3) 若在平面曲線的方程式中，以 $-x$ 代 x 且 $-y$ 代 y，可得同樣的方程式，則曲線對稱於原點.

定義 0-2

通過兩點 $P_1(x_1, y_1)$ 與 $P_2(x_2, y_2)$ 的非垂直線的斜率 m 定義為

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

註：垂直線的斜率沒有定義或無斜率.

如果 $y_1=y_2$，且 $x_1\neq x_2$，則通過 (x_1, y_1) 及 (x_2, y_2) 之直線與 x-軸平行，其斜率為零. 如直線向右上方傾斜，則其斜率為正；如直線向左上方傾斜，則其斜率為負.

已知一直線的斜率 m 且通過點 (x_0, y_0)，則其方程式為

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

此方程式稱為直線的點斜式.

已知一直線的斜率 m 且通過點 $(0, b)$，則其方程式為

$$y=mx+b$$

此處 b 稱為直線的 y-截距. 此方程式稱為直線的斜截式，其圖形如圖 0-3 所示.

直線方程式的形式為

$$ax+by+c=0$$

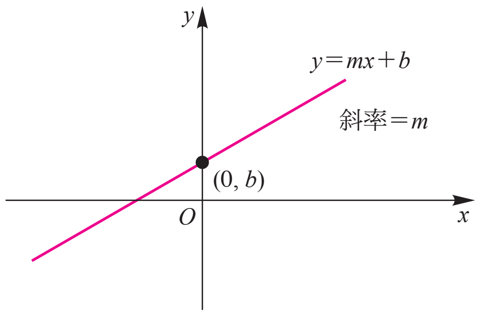


圖 0-3

其中 a、b 與 c 皆為常數，a、b 不全為零. 如 $b=0$，則 $ax+c=0$，$x=-\dfrac{c}{a}$，此為與 y-軸平行的直線. 如 $a=0$，則 $by+c=0$，$y=-\dfrac{c}{b}$，此為與 x-軸平行的直線. 如 $a\neq 0$，$b\neq 0$，則 $y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$，此表示斜率為 $-\dfrac{a}{b}$ 且 y-截距為 $-\dfrac{c}{b}$ 的直線方程式.

定理 0-4

兩條非垂直線互相平行，若且唯若它們有相同的斜率.

定理 0-5

斜率分別為 m_1 與 m_2 的兩條非垂直線互相垂直，若且唯若 $m_1m_2=-1$.

例題 1 已知一直線通過點 (3，-3) 且平行於通過兩點 (-1，2) 及 (3，-1) 的直線，求其方程式.

解 所求直線的斜率為 $m=\dfrac{-1-2}{3-(-1)}=-\dfrac{3}{4}$，故該直線的方程式為

$$y-(-3)=-\frac{3}{4}(x-3)$$

即, $$y=-\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}.$$

例題 2 試證：$A(1,3)$、$B(3,7)$ 與 $C(7,5)$ 為直角三角形的三個頂點.

解 通過 A 與 B 之直線的斜率為 $m_1=\dfrac{7-3}{3-1}=2$，而通過 B 與 C 之直線的斜率為 $m_2=\dfrac{5-7}{7-3}=-\dfrac{1}{2}$. 因 $m_1m_2=-1$，故通過 A 與 B 的直線垂直於通過 B 與 C 的直線. 所以，ABC 為直角三角形.

0-3 圓錐曲線

設 L 與 M 是兩相交但不垂直的直線，將 L 固定而 M 繞 L 旋轉一周，則直線 M 旋轉所成的曲面，就是一個正圓錐面，如圖 0-4 所示.

令 S 表示 M 繞 L 旋轉一周所成的正圓錐面，又設 E 是一個平面，則 E 與 S 的截痕形成各種不同的圖形，至於是哪一種圖形，我們分別討論如下：

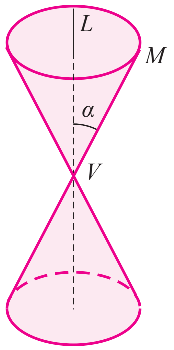
情況 1：若 E 與 L 垂直，但不通過 L 與 M 的交點 V (V 稱為正圓錐面 S 的頂點)，則 E 與 S 的截痕是一個**圓**，如圖 0-5 所示.

情況 2：若將 E 稍作轉動，使呈傾斜，且與 L 不垂直，也不通過頂點 V，將 S 分成兩部分，則 E 與 S 的截痕是一個**橢圓**，如圖 0-6 所示.

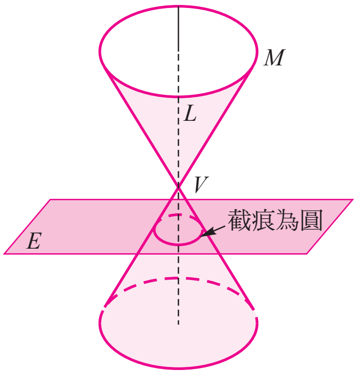
情況 3：將平面 E 繼續轉動，使 E 與直線 M 平行，則 E 與 S 的截痕是一個**拋物線**，如圖 0-7 所示.

情況 4：將平面 E 再繼續轉動，使 E 與正圓錐面 S 的上下兩部分都相交且不通過頂點 V，則 E 與 S 的截痕是一個**雙曲線**，如圖 0-8 所示.

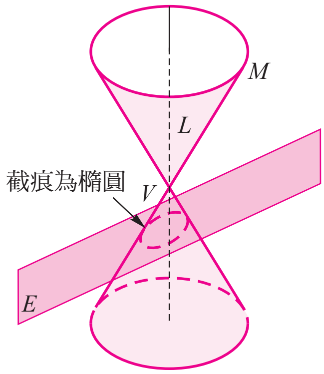
圓、橢圓、拋物線及雙曲線的圖形，都可由一個平面與一個正圓錐面相截而得，因此合稱為**圓錐曲線** (或稱為**二次曲線**)，或簡稱為**錐線**.



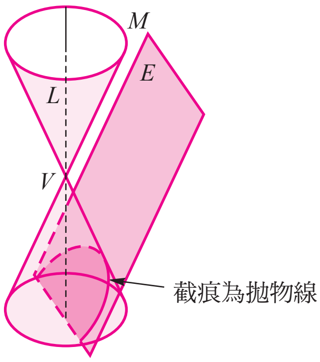
✦ 圖 0-4



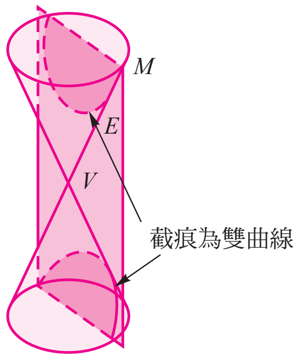
✦ 圖 0-5



✦ 圖 0-6



✦ 圖 0-7



✦ 圖 0-8

定義 0-3

在坐標平面上，與一定點等距離的所有點所成的軌跡稱為**圓**，此定點稱為**圓心**，圓心與圓上各點的距離稱為**半徑**.

圓心為 (h, k) 且半徑為 r 之圓的方程式為

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

圖形如圖 0-9 所示．若令 $h=0$，$k=0$，則上式可化為

$$x^2+y^2=r^2$$

故圓心為原點且半徑為 r 之圓的方程式為

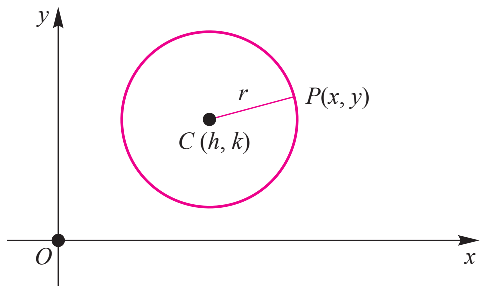


圖 0-9

$$x^2+y^2=r^2.$$

註：圓心在原點且半徑為 1 的圓 $x^2+y^2=1$ 稱為**單位圓**.

例題 1　求圓 $x^2+y^2-2x+2y-14=0$ 的圓心與半徑.

解　因

$$\begin{aligned} x^2+y^2-2x+2y-14 &= x^2-2x+1+y^2+2y+1-16 \\ &= (x-1)^2+(y+1)^2-16 \\ &= 0 \end{aligned}$$

故原式可改寫成

$$(x-1)^2+(y+1)^2=4^2$$

此圓的圓心為 (1, −1)，半徑為 4.

定義 0-4

在同一個平面上，與兩個定點的距離和等於定數 $2a$ $(a>0)$ 的所有點所成的軌跡稱為**橢圓**，此兩個定點稱為橢圓的**焦點**.

設 $a>b>0$.

1. 在橢圓方程式 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 中以 $-y$ 代 y，所得方程式不變，可知橢圓對稱於 x-軸.

橢圓方程式	中心	焦　點	長軸的長	短軸的長
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$(0,\ 0)$	$(c,\ 0)$，$(-c,\ 0)$	$2a$	$2b$
$\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$	$(0,\ 0)$	$(0,\ c)$，$(0,\ -c)$	$2a$	$2b$
$\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$(h,\ k)$	$(h+c,\ k)$，$(h-c,\ k)$	$2a$	$2b$
$\dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1$	$(h,\ k)$	$(h,\ k+c)$，$(h,\ k-c)$	$2a$	$2b$

註：(i) $c^2=a^2-b^2$. (ii) 上表橢圓之圖形如圖 0-10(i) 至 0-10(iv).

2. 在橢圓方程式 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 中以 $-x$ 代 x，所得方程式不變，可知橢圓對稱於 y-軸.

3. 在橢圓方程式 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 中以 $-x$ 代 x，以 $-y$ 代 y，所得方程式不變，可知橢圓對稱於原點.

例題 2　求橢圓 $25x^2+16y^2-100x+96y-156=0$ 的中心、焦點、頂點及長軸、短軸的長.

解

$$25x^2+16y^2-100x+96y-156=0$$
$$\Rightarrow 25(x^2-4x+4)+16(y^2+6y+9)=156+100+144$$
$$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y+3)^2}{25}=1$$

可得 $a=5$，$b=4$，$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-16}=3$.

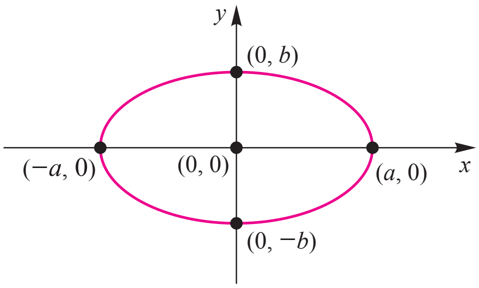
(1) 中心：$(2,\ -3)$.

(2) 焦點：$(2,\ 0)$ 及 $(2,\ -6)$.

(3) 頂點：$(2,\ 2)$、$(2,\ -8)$、$(6,\ -3)$ 及 $(-2,\ -3)$.

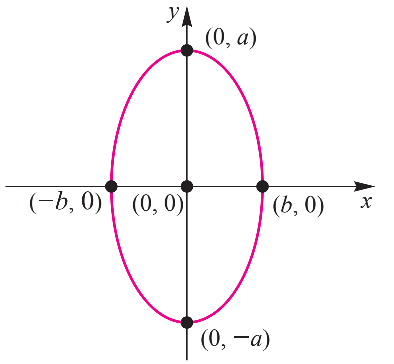
(4) 長軸的長 $=2a=10$.

(5) 短軸的長 $=2b=8$.



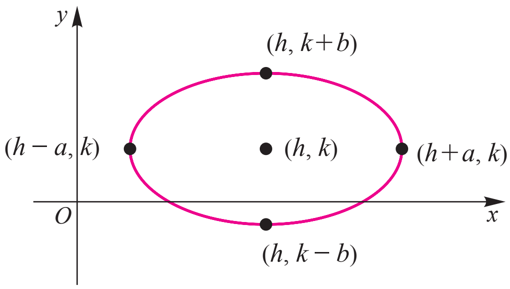
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

(i)



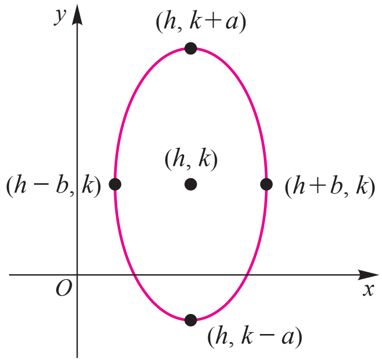
$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

(ii)



$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

(iii)



$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

(iv)

圖 0-10

定義 0-5

在同一個平面上，與一個定點及一條定直線的距離相等之所有點所成的軌跡，稱為**拋物線**，定點稱為**焦點**，定直線稱為**準線**.

拋物線方程式	頂點	焦點	對稱軸	準線	開　口
$x^2=4cy$	$(0,\ 0)$	$(0,\ c)$	$x=0$	$y=-c$	向上 $(c>0)$，向下 $(c<0)$
$y^2=4cx$	$(0,\ 0)$	$(c,\ 0)$	$y=0$	$x=-c$	向右 $(c>0)$，向左 $(c<0)$
$(x-h)^2=4c(y-k)$	$(h,\ k)$	$(h,\ k+c)$	$x=h$	$y=k-c$	向上 $(c>0)$，向下 $(c<0)$
$(y-k)^2=4c(x-h)$	$(h,\ k)$	$(h+c,\ k)$	$y=k$	$x=h-c$	向右 $(c>0)$，向左 $(c<0)$

註：上表拋物線之圖形如圖 0-11 至 0-14.

例題 3　求拋物線 $y^2+12x+2y-47=0$ 的頂點、軸、焦點與準線.

解

$$y^2+12x+2y-47=0$$

$$\Rightarrow (y+1)^2=-12(x-4)$$

$$\Rightarrow (y+1)^2=4(-3)(x-4)$$

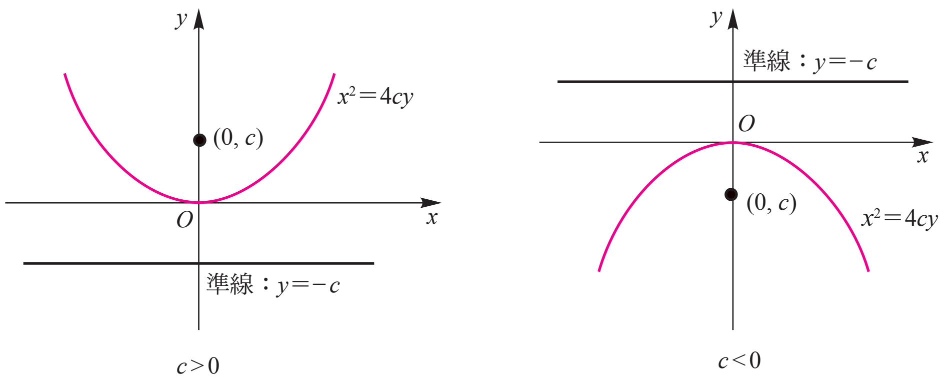


圖 0-11

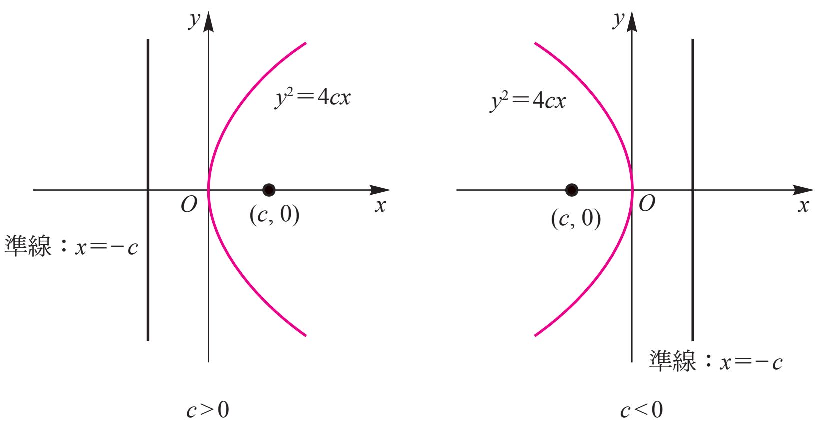
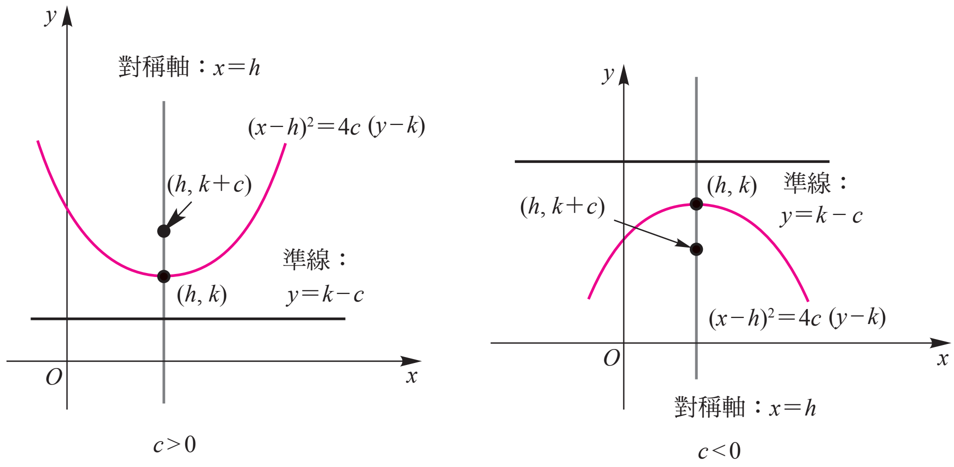
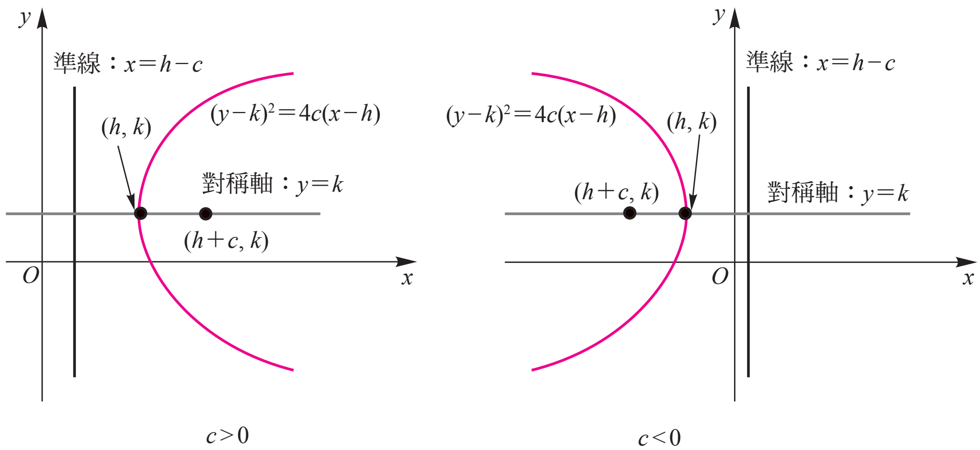


圖 0-12



✦ 圖 0-13



✦ 圖 0-14

故 $c=-3$.

(1) 頂點：$V(4,\ -1)$.

(2) 軸：$y-k=y+1=0$，即 $y=-1$.

(3) 焦點：$F(-3+4,\ -1)$，即 $F(1,\ -1)$.

(4) 準線：$x=-c+h=3+4=7$.

定義 0-6

在同一個平面上，與兩定點之距離的差等於定數 $2a$ $(a>0)$ 的所有點所成的軌跡稱為**雙曲線**，此兩定點稱為雙曲線的**焦點**.

雙曲線方程式	頂　點	中心	焦　點	漸近線
$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$(a,\ 0)$，$(-a,\ 0)$	$(0,\ 0)$	$(c,\ 0)$，$(-c,\ 0)$	$y=\pm\dfrac{b}{a}x$
$\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$	$(0,\ a)$，$(0,\ -a)$	$(0,\ 0)$	$(0,\ c)$，$(0,\ -c)$	$y=\pm\dfrac{a}{b}x$
$\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$(h+a,\ k)$，$(h-a,\ k)$	$(h,\ k)$	$(h+c,\ k)$，$(h-c,\ k)$	$y=k\pm\dfrac{b}{a}(x-h)$
$\dfrac{(y-h)^2}{b^2}-\dfrac{(x-k)^2}{a^2}=1$	$(h,\ k+a)$，$(h,\ k-a)$	$(h,\ k)$	$(h,\ k+c)$，$(h,\ k-c)$	$y=k\pm\dfrac{a}{b}(x-h)$

註：(i) $c^2=a^2+b^2$.　(ii) 上表雙曲線之圖形如圖 0-15 至 0-18.

例題 4　求雙曲線 $4x^2-y^2+8x+4y+4=0$ 的中心、頂點、焦點、貫軸的長與共軛軸的長.

解

$$4x^2-y^2+8x+4y+4=0$$

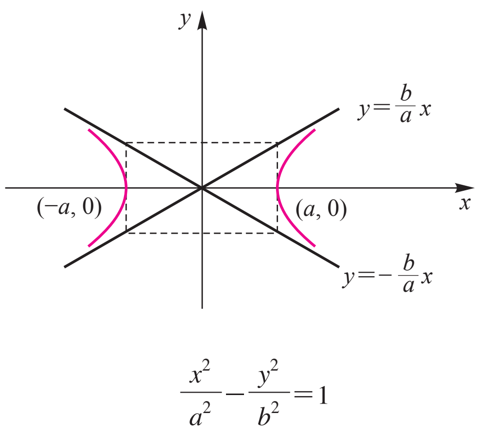


圖 0-15

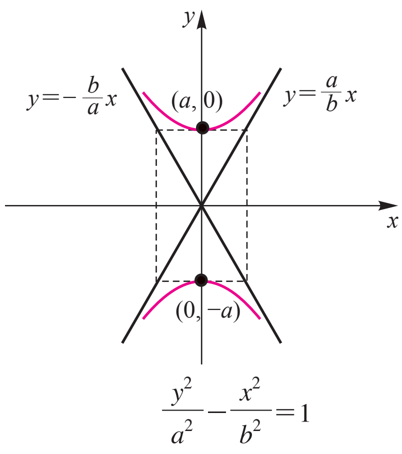
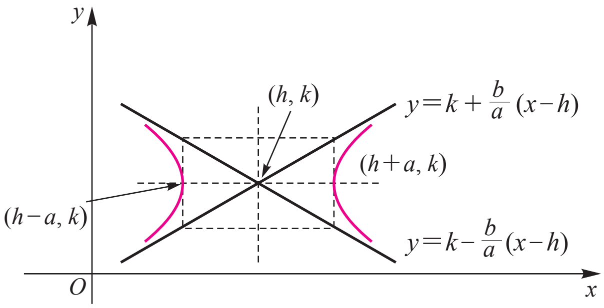
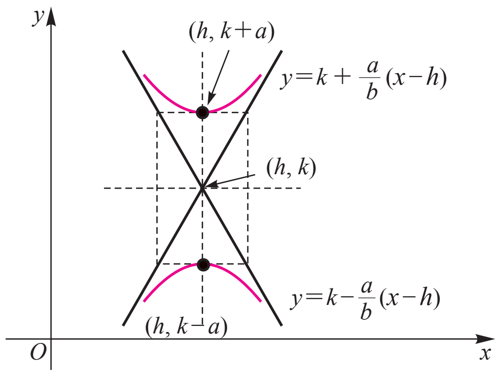


圖 0-16



$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

✦ 圖 0-17



$$\frac{(x-k)^2}{a^2}-\frac{(y-h)^2}{b^2}=1$$

✦ 圖 0-18

$$\Rightarrow 4(x^2+2x+1)-(y^2-4y+4)=-4$$

$$\Rightarrow (y-2)^2-4(x+1)^2=4$$

$$\Rightarrow \frac{(y-2)^2}{2^2}-\frac{(x+1)^2}{1}=1$$

$a=2$，$b=1$，$c^2=a^2+b^2=5 \Rightarrow c=\sqrt{5}$，貫軸與 y-軸平行.

(1) 中心：$(-1,\ 2)$.

(2) 頂點：$(-1,\ 4)$ 及 $(-1,\ 0)$.

(3) 焦點：$(-1,\ 2+\sqrt{5})$ 及 $(-1,\ 2-\sqrt{5})$.

(4) 貫軸的長$=2a=4$.

(5) 共軛軸的長$=2b=2$.

0-4 函　數

函數在數學上是一個非常重要的觀念，也是學習微積分的基礎，許多數學理論皆需要用到函數的觀念. 函數可以想成是兩個集合之間元素的對應.

定義 0-7

設 A、B 是兩個非空集合，若對每一個 $x \in A$，恰有一個 $y \in B$ 與它對應，將此對應方式表為

$$f : A \to B$$

則稱 f 為由 A 映到 B 的**函數**. 集合 A 稱為函數 f 的**定義域**，記為 D_f，集合 B 稱為函數 f 的**對應域**. 元素 y 稱為 x 在 f 之下的**像**或 f 在 x 的**值**，以 $f(x)$ 表示之，即，$y=f(x)$；f 在定義域 A 中所有 x 的值所成的集合稱為 f 的**值域**，記為 R_f，即，

$$R_f = f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

x 稱為**自變數**，而 y 稱為**因變數**.

此定義的說明如圖 0-19 所示.

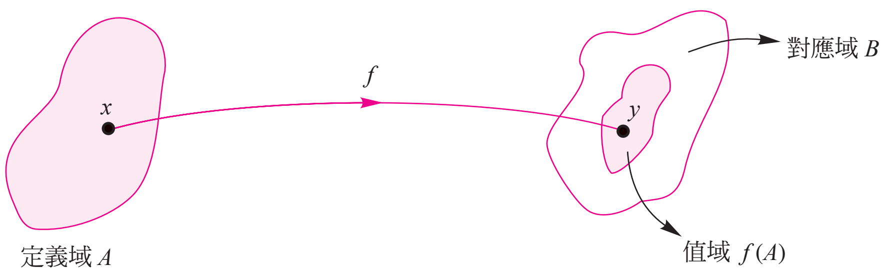


圖 0-19

若兩函數 f 與 g 的定義域相同且值域也相同，則稱這兩函數相等，記為 $f=g$，即，

$$f=g \Leftrightarrow D_f = D_g \text{ 且 } R_f = R_g$$

例如，

$$f(x) = x^3 + x，\ x \in \{-1，0，1\}$$

$$g(x) = 2x，\ x \in \{-1，0，1\}$$

因這兩函數的定義域皆為 $\{-1，0，1\}$ 且值域同為 $\{-2，0，2\}$，故 $f=g$.

定義 0-8

設 f 為由 A 映到 B 的函數，若對 A 中任意兩相異元素 a 與 b，恆有 $f(a) \neq f(b)$，則稱 f 為**一對一函數**. 若 $f(A)=B$，則稱 f 為**映成函數**.

註： 在定義 0-8 中，“$a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$”可改寫成“$f(a)=f(b) \Rightarrow a=b$”.

若 f 為一對一且映成，則集合 A 與 B 稱為**一一對應**. 實數與數線上的點的對應就是一個一一對應的例子.

微積分中所討論的函數的定義域及值域都是實數系 $\mathbb{R}$ 的子集，這種函數稱為**實函數**. 如果以 $y=f(x)$ 定義的函數的定義域沒有明確說明，則一般是指 $\mathbb{R}$ 的子集，而這集合中的每一個元素 x 都使 $f(x)$ 為一確定的實數.

例題 1 確定函數 $f(x)=\sqrt{x-x^2}$ 的定義域.

解 因 $x-x^2 \geq 0$，即，$x(1-x) \geq 0$，可得 $0 \leq x \leq 1$，故定義域為 $D_f=\{x \mid 0 \leq x \leq 1\}=[0,\ 1]$.

一些常在微積分課程裡出現的實函數如下：

1. 常數函數：$f(x)=c$，其中 c 為常數.
2. 恆等函數：$f(x)=x$.
3. 多項式函數：$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，$n$ 為正整數.
4. 冪函數：$f(x)=cx^r$，其中 c 為非零常數且 r 為實數.
5. 有理函數：$R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$，其中 $P(x)$ 與 $Q(x)$ 皆為多項式函數，$Q(x) \neq 0$.
6. 高斯函數：$f(x)=[\![x]\!]$，其中 $[\![x]\!]$ 表示小於或等於 x 的最大整數. 換句話說，

$$f(x)=[\![x]\!]=\begin{cases} n-1, & \text{若 } n-1 \leq x < n \\ n, & \text{若 } n \leq x < n+1 \end{cases},\ n \in \mathbb{Z}.$$

7. 超越函數：三角函數、反三角函數、指數函數、對數函數與雙曲線函數.

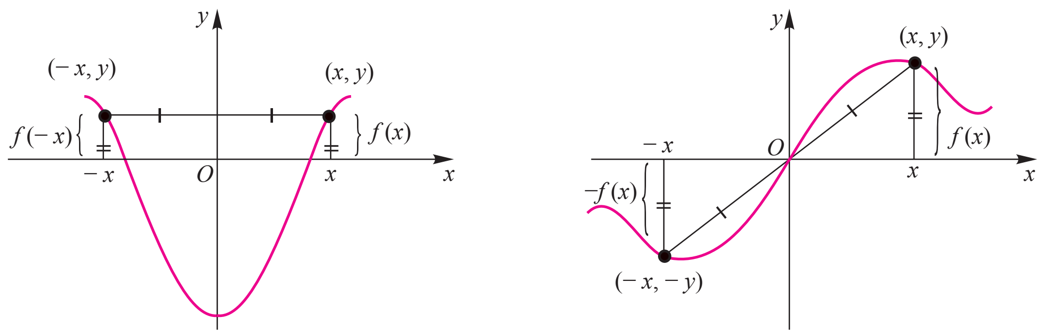
註： 若一函數僅由常數函數與恆等函數透過加法、減法、乘法、除法與開方等五種運算

中的任意運算而獲得，則稱為**代數函數**. 例如，上面 1～5 所述的函數皆為代數函數，又 $f(x)=3x^{2/5}$、$g(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+\sqrt[3]{x^2-2}}$ 亦為代數函數. 非代數函數者稱為**超越函數**.

定義 0-9

對任意 $x\in D_f$，若 $f(-x)=f(x)$，則稱 f 為**偶函數**；又若 $f(-x)=-f(x)$，則稱 f 為**奇函數**.

圖 0-20 分別表示偶函數與奇函數的圖形，偶函數的圖形對稱於 y-軸，奇函數的圖形對稱於原點.



(i) 偶函數圖形對稱於 y-軸　　(ii) 奇函數圖形對稱於原點

圖 0-20

例題 2　(1) 絕對值函數 $f(x)=|x|$ 為偶函數.

(2) 函數 $f(x)=3x^4+2x^2+1$ 為偶函數.

(3) 餘弦函數 $f(x)=\cos x$ 為偶函數.

(4) 函數 $f(x)=x^3$ 為奇函數.

(5) 正弦函數 $f(x)=\sin x$ 為奇函數.

0-5 函數的圖形

定義 0-10

設 $f: A \to B$ 為一個從 $\mathbb{R}$ 的子集 A 映到 $\mathbb{R}$ 的子集 B 的函數，則坐標平面上所有以 $(x, f(x))$ 為坐標的點所構成的集合

$$\{(x, f(x)) \mid x \in A\}$$

稱為函數 f 的**圖形**，而函數 f 的圖形也叫做方程式 $y=f(x)$ 的圖形.

若 x 在 f 的定義域中，我們稱 f 在 x 有定義，或稱 $f(x)$ 存在；反之，"f 在 x 無定義"意指 x 不在 f 的定義域中. 如以 $(x, f(x))$ 作為一有序數對，即可在坐標平面上描出若干點 $P(x, f(x))$，然後再適當地連接之，則可得函數的概略圖形.

例題 1 作絕對值函數 $f(x)=|x|$ 的圖形.

解

$$f(x)=\begin{cases} x, & 若\ x \geq 0 \\ -x, & 若\ x < 0 \end{cases}$$

先作 $y=x$ 的圖形，再作 $y=-x$ 的圖形，則得 f 的圖形，如圖 0-21 所示.

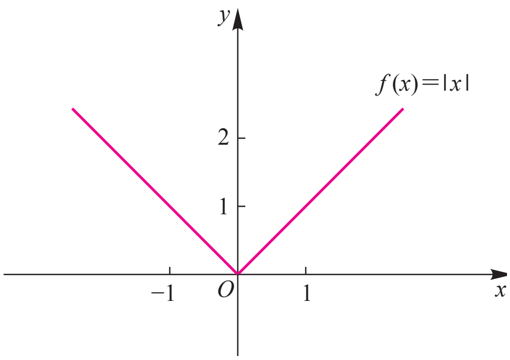


圖 0-21

例題 2 作符號函數

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}, & \text{若 } x\neq 0\\ 0, & \text{若 } x=0\end{cases}$$

的圖形.

解 (i) 若 $x>0$，則

$$\operatorname{sgn}(x)=\frac{|x|}{x}=\frac{x}{x}=1\;;$$

(ii) 若 $x>0$，則

$$\operatorname{sgn}(x)=\frac{|x|}{x}=\frac{-x}{x}=-1\;;$$

(iii) 若 $x=0$，則 $\operatorname{sgn}(x)=0$. 其圖形如圖 0-22 所示.

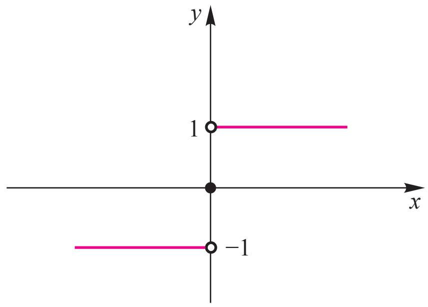


圖 0-22

例題 3 作高斯函數 $f(x)=[\![x]\!]$ 的圖形.

解

$$f(x)=[\![x]\!]=\begin{cases}n-1, & \text{若 } n-1\leq x<n\\ n, & \text{若 } n\leq x<n+1\end{cases}$$

其中 n 為整數.

圖形上一些點的橫坐標與縱坐標可列表如下：

x	$f(x)$
………	………
$-3\leq x<-2$	-3
$-2\leq x<-1$	-2
$-1\leq x<0$	-1
$0\leq x<1$	0
$1\leq x<2$	1
$2\leq x<3$	2
$3\leq x<4$	3
………	………

高斯函數 $f(x)=[\![x]\!]$ 的圖形為階梯狀，如圖 0-23 所示.

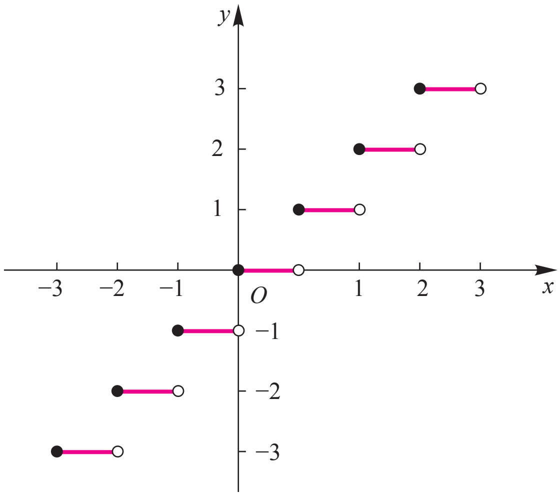


圖 0-23

高斯函數的重要性質如下：

1. 高斯不等式

(1) 對任意 $x \in \mathbb{R}$，$[\![x]\!] \leq x < [\![x]\!]+1$.

(2) 對任意 $x \in \mathbb{R}$，$x-1 < [\![x]\!] \leq x$.

(3) $0 \leq x-[\![x]\!] < 1 \Rightarrow [\![x-[\![x]\!]]\!]=0$

2. 高斯等式

(1) 對任意 $x \in \mathbb{R}$，$m \in \mathbb{Z}$，$[\![x+m]\!]=[\![x]\!]+m$.

(2) 對任意 $x \in \mathbb{R}$，$m \in \mathbb{Z}$，$[\![x-m]\!]=[\![x]\!]-m$.

例題 4 作函數 $f(x)=x-[\![x]\!]$ 的圖形.

解 當 $-2 \leq x < -1$，$f(x)=x+2$.

當 $-1 \leq x < 0$，$f(x)=x+1$.

當 $0 \leq x < 1$，$f(x)=x$.

當 $1 \leq x < 2$，$f(x)=x-1$.

當 $2 \leq x < 3$，$f(x)=x-2$.

其圖形如圖 0-24 所示.

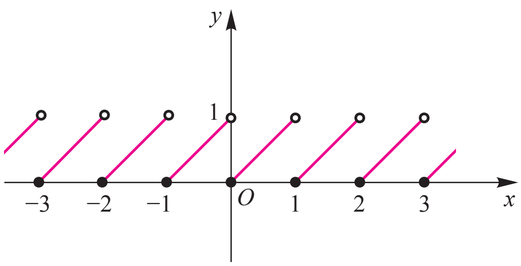


圖 0-24

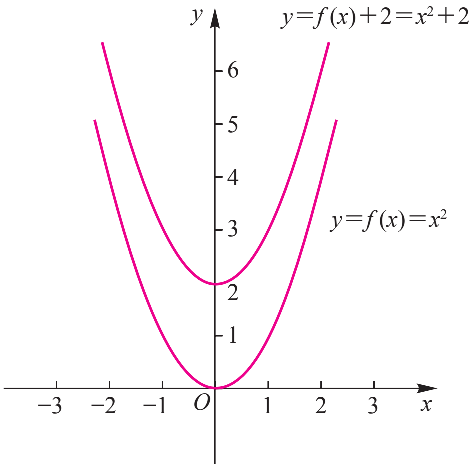


圖 0-25

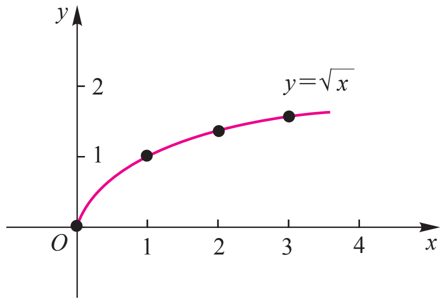


圖 0-26

某些較複雜的函數圖形可由較簡單的函數圖形利用平移的方法而得之. 例如，對相同的 x 值，$y=x^2+2$ 的 y 值較 $y=x^2$ 的 y 值多 2，故 $y=x^2+2$ 的圖形在形狀上與 $y=x^2$ 的圖形相同，但位於 $y=x^2$ 圖形上方 2 個單位，如圖 0-25 所示.

一般而言，垂直平移 $(c>0)$ 敘述如下：

$y=f(x)+c$ 的圖形位於 $y=f(x)$ 的圖形上方 c 個單位.

$y=f(x)-c$ 的圖形位於 $y=f(x)$ 的圖形下方 c 個單位.

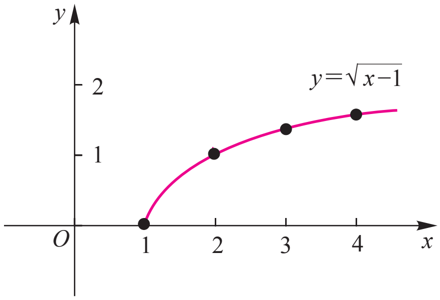
現在，我們考慮水平平移，例如，平方根函數 $f(x)=\sqrt{x}$ 的定義域為 $\{x\,|\,x\ge 0\}$，其圖形“開始”處在 $x=0$，如圖 0-26 所示.

考慮函數 $y=f(x)=\sqrt{x-1}$，其定義域為 $\{x\,|\,x\ge 1\}$，圖形的“開始”處在 $x=1$，如圖 0-27 所示. $y=f(x)=\sqrt{x-1}$ 的圖形是將 $y=\sqrt{x}$ 的圖形向右平移一個單位而得. $y=f(x)=\sqrt{x+4}$ 的圖形是將 $y=\sqrt{x}$ 的圖形向左平移 4 個單位而得，如圖 0-28 所示.

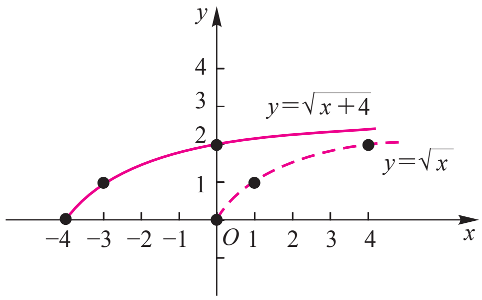
一般而言，水平平移 $(c>0)$ 敘述如下：

$y=f(x-c)$ 的圖形位於 $y=f(x)$ 的圖形右邊 c 個單位.

$y=f(x+c)$ 的圖形位於 $y=f(x)$ 的圖形左邊 c 個單位.



✦ 圖 0-27

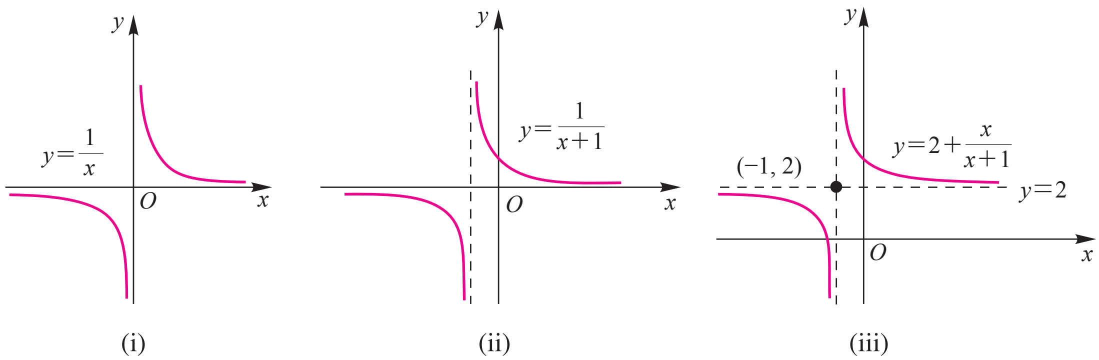


✦ 圖 0-28

例題 5 試繪出 $y=2+\dfrac{x}{x+1}$ 的圖形.

解 首先將 $y=\dfrac{1}{x}$ 的圖形向左平移 1 個單位，然後再向上平移 2 個單位，可得

$y=2+\dfrac{x}{x+1}$ 的圖形，如圖 0-29 所示.



✦ 圖 0-29

下面是有關**分段定義函數**圖形的例子.

例題 6 在某遊樂區租馬車的費用是 10 分鐘以內 (含 10 分鐘) 為 100 元，而 10 分鐘之後，每 1 分鐘須多付 20 元，若 $f(x)$ 為 x 分鐘的全部費用，則 $f(x)$ 的值為

$$f(x)=\begin{cases}100, & 0<x\leq 10 \\ 100+20(x-10), & 10<x\end{cases}$$

← 10 分鐘以內且含 10 分鐘為 100 元

← 第一個 10 分鐘為 100 元，加上第一個 10 分鐘之後的每 1 分鐘 20 元

例題 7　作函數

$$f(x)=\begin{cases}x-1 & \text{，若 } -2<x\leq 1 \\ 2 & \text{，若 } 1<x<2 \\ -x+2 & \text{，若 } 2\leq x\leq 4\end{cases}$$

的圖形.

解　函數 f 之定義域為 $\{x\mid -2<x\leq 4\}$，其圖形由三部分所組成：

在 $-2<x\leq 1$ 之部分，與直線 $y=x-1$ 相同；

在 $1<x<2$ 之部分，與直線 $y=2$ 相同；

在 $2\leq x\leq 4$ 之部分，與直線 $y=-x+2$ 相同.

其圖形如圖 0-30 所示.

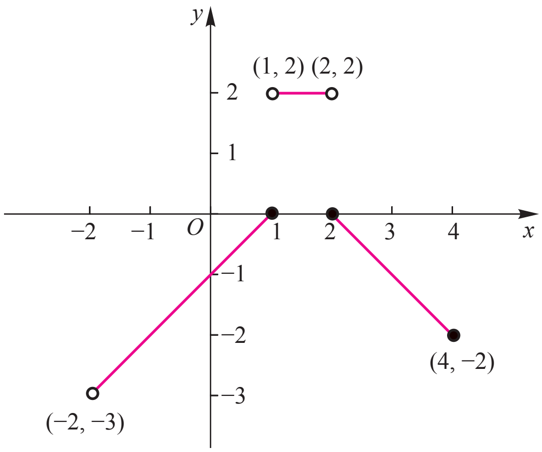


圖 0-30

0-6 函數的運算

兩函數 f 與 g 的和、差、積、商函數，分別記作 $f+g$、$f-g$、fg、$\dfrac{f}{g}$，其意義如下：

設 f 是由 $\mathbb{R}$ 的子集 A 映至 $\mathbb{R}$ 的子集 C，g 是由 $\mathbb{R}$ 的子集 B 映至 $\mathbb{R}$ 的子集 D，且 $A\cap B\neq\phi$，則

$$\begin{aligned}
&(f+g)(x)=f(x)+g(x), && x\in A\cap B\\
&(f-g)(x)=f(x)-g(x), && x\in A\cap B\\
&(fg)(x)=f(x)g(x), && x\in A\cap B\\
&\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right), && x\in A\cap B,\ g(x)\neq 0
\end{aligned}$$

例題 1　若 $f(x)=\sqrt{x}$，$g(x)=\sqrt{9-x^2}$，求 $f+g$、$f-g$、fg 與 $\dfrac{f}{g}$.

解　函數 f 的定義域為 $[0,\ \infty)$，函數 g 的定義域為 $[-3,\ 3]$，故 f 與 g 的定義域的交集為

$$[0,\ \infty)\cap[-3,\ 3]=[0,\ 3]$$

於是，

$$\begin{aligned}
&(f+g)(x)=\sqrt{x}+\sqrt{9-x^2}, && 0\leq x\leq 3\\
&(f-g)(x)=\sqrt{x}-\sqrt{9-x^2}, && 0\leq x\leq 3\\
&(fg)(x)=\sqrt{x}\,\sqrt{9-x^2}, && 0\leq x\leq 3\\
&\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{9-x^2}}\right), && 0\leq x<3.
\end{aligned}$$

讀者應注意 $\dfrac{f}{g}$ 的定義域為 $[0,\ 3)$，因 $g(x)\neq 0$.

兩實函數除了可作上述的結合外，兩者亦可作一種很有用的結合，稱其為合成. 現在我們考慮函數 $y=f(x)=(x^2+1)^3$，如果我們將它寫成下列的形式：

$$y=f(u)=u^3$$

其中 $$u=g(x)=x^2+1$$

則依取代的過程，我們可得到原來的函數，亦即，

$$y=f(x)=f(g(x))=(x^2+1)^3$$

此一過程稱為合成，故原來的函數可視為一合成函數.

一般而言，如果有兩函數 $g: A\to B$，$f: B\to C$，假設 x 為 g 函數定義域中的一元素，則可找到 x 在 g 之下的像 $g(x)$. 若 $g(x)$ 在 f 的定義域內，我們又可在 f 之下找到 C 中的像 $f(g(x))$. 因此，就存在一個從 A 到 C 的函數：

$$f\circ g: A\to C$$

其對應於 $x\in A$ 的像為

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))$$

此一函數稱為 g 與 f 的合成函數.

上述合成函數的作用，可以視為原料 x 經由工廠 g 製造出產品 $g(x)$，而 $g(x)$ 又是工廠 f 的原料，故可再經由工廠 f 製造出產品 $f(g(x))$，整個合起來，從 x 到 $f(g(x))$ 的過程就是合成函數 $f\circ g$ 的作用，可以圖解如圖 0-31.

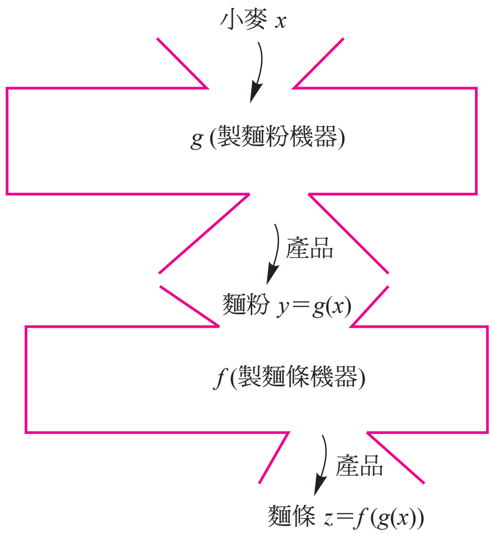


圖 0-31

定義 0-11

給予兩函數 f 與 g，則合成函數 $f\circ g$ (讀作 "f circle g") 定義為

$$(f\circ g)(x)=f(g(x)),\ x\in D_g,\ g(x)\in D_f.$$

此處 $f\circ g$ 的定義域是由 $g(x)$ 在 f 的定義域中的所有 x 所組成.

合成函數 $f\circ g$ 的對應示於圖 0-32 中.

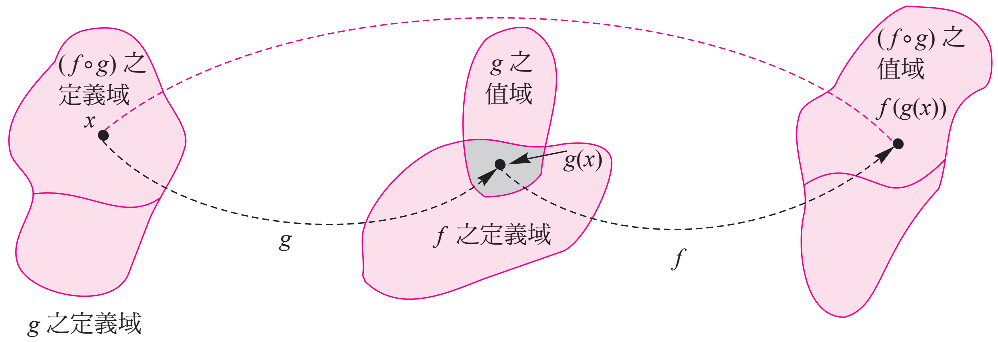


圖 0-32

例題 2 若 $f(x)=\dfrac{6x}{x^2-9}$ 且 $g(x)=\sqrt{3x}$，求 $(f\circ g)(4)$，並求 $(f\circ g)(x)$ 及其定義域.

解

$$(f\circ g)(4)=f(g(4))=f(\sqrt{12})=\frac{6\sqrt{12}}{(\sqrt{12})^2-9}=\frac{6\sqrt{12}}{3}=2\sqrt{12}=4\sqrt{3}$$

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(\sqrt{3x})=\frac{6\sqrt{3x}}{(\sqrt{3x})^2-9}=\frac{6\sqrt{3x}}{3x-9}=\frac{2\sqrt{3x}}{x-3}$$

$(f\circ g)(x)$ 的定義域為 $[0,\ 3)\cup(3,\ \infty)$，定義域中須除去 3，以避免分母為 0.

讀者應注意，任何兩個函數的合成不一定有意義. 例如，$f(x)=\sqrt{9-x^2}$，$D_f=[-3,\ 3]$，$R_f=[0,\ 3]$；$g(x)=x^2+4$，$D_g=(-\infty,\ \infty)$，$R_g=[4,\ \infty)$. 由於 $R_g\cap D_f=\phi$，故 $f(g(x))=\sqrt{9-(x^2+4)^2}$ 無意義.

例題 3 若 $f(x)=x^2-2$，$g(x)=3x+4$，求 $(f\circ g)(x)$ 與 $(g\circ f)(x)$.

解 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(3x+4)=(3x+4)^2-2=9x^2+24x+14$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2-2)=3(x^2-2)+4=3x^2-2.$

讀者應注意，在例題 3 中，$f(g(x))$ 與 $g(f(x))$ 不同，亦即，$f\circ g\neq g\circ f$.

例題 4 若 $f(x)=x^2$，求一函數 g 使得 $f(g(x))=x$；並問 $g(f(x))=x$ 是否也成立？

解 因 $f(g(x))=[g(x)]^2=x\geq 0$，故 $g(x)=\sqrt{x}$，$x\geq 0$.

$$g(f(x))=g(x^2)=\sqrt{x^2}=|x|$$

因此，$g(f(x))=x$ 不恆成立.

例題 5 若 $f(x)=x^2+1$，$g(x)=\sqrt{x}$，$h(x)=1-x$，求 $((f\circ g)\circ h)(x)$ 及 $(f\circ(g\circ h))(x)$.

解
$$((f\circ g)\circ h)(x)=(f\circ g)(h(x))=f(g(h(x)))=f(g(1-x))=f(\sqrt{1-x})$$
$$=(\sqrt{1-x})^2+1=2-x,\quad x\leq 1$$
$$(f\circ(g\circ h))(x)=f((g\circ h)(x))=f(g(h(x)))=f(g(1-x))=f(\sqrt{1-x})$$
$$=(\sqrt{1-x})^2+1=2-x,\quad x\leq 1$$

兩者的定義域皆為 $\{x\,|\,x\leq 1\}$.

0-7 反函數

在本節中，我們將討論如何求代數函數的反函數，依照函數的定義，若兩實數子集之間的逆對應能符合函數的關係，這就產生了反函數的觀念.

定義 0-12

若兩函數 f 與 g 滿足：

對於 g 的定義域中的每一 x 恆有 $f(g(x))=x$，且對於 f 的定義域中的每一 x 恆有 $g(f(x))=x$，則我們稱 f 為 g 的**反函數**或 g 為 f 的**反函數**. 我們又稱 f 與 g **互為反函數**.

例題 1 兩函數 $f(x)=\sqrt{2x-3}$，$x\geq\dfrac{3}{2}$ 與 $g(x)=\dfrac{x^2+3}{2}$，$x\geq 0$ 互為反函數，因為

$$f(g(x))=\left(\frac{x^2+3}{2}\right)=\sqrt{2\cdot\frac{x^2+3}{2}-3}=\sqrt{x^2}=x$$

$$g(f(x))=\frac{(f(x))^2+3}{2}=\frac{(\sqrt{2x-3})^2+3}{2}=\frac{2x-3+3}{2}=x$$

滿足定義 0-12.

函數 f 的反函數通常記為 f^{-1} (唸成 "f inverse")；於是，

$$f(f^{-1}(x))=x,\ \forall\, x\in D_{f^{-1}},\ f^{-1}(f(x))=x,\ \forall\, x\in D_f.$$

注意：符號 f^{-1} 並不表示 $\dfrac{1}{f}$.

依定義 0-12，我們得知

f^{-1} 的定義域$=f$ 的值域

f^{-1} 的值域$=f$ 的定義域

已知函數 f，我們將對下面兩個問題感到興趣：

1. f 有反函數嗎？

2. 若有，我們如何求它？

欲回答第一個問題，我們必須瞭解在 f 有反函數時，f 與 f^{-1} 的圖形之間有何關係.

定理 0-6　反函數的鏡射性質

f 的圖形包含 (a, b)，若且唯若 f^{-1} 的圖形包含點 (b, a).

證明　若 (a, b) 位於 f 的圖形上，則 $f(a)=b$ 且

$$f^{-1}(b)=f^{-1}(f(a))=a.$$

於是，(b, a) 位於 f^{-1} 的圖形上. 同理可證明，若 (b, a) 位於 f^{-1} 的圖形上，則 (a, b) 位於 f 的圖形上. 因此，f^{-1} 的圖形是由 f 的圖形對直線 $y=x$ 作鏡射而獲得. 如圖 0-33 所示.

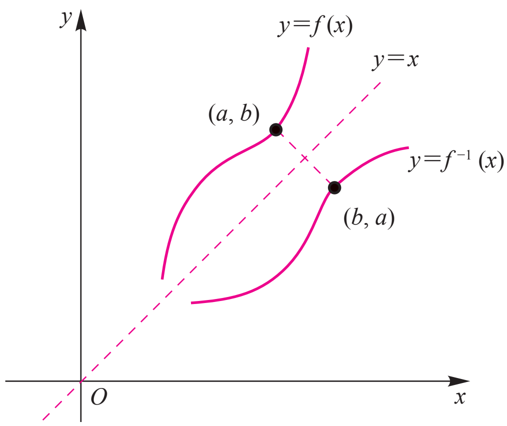


圖 0-33

定理 0-7　反函數存在定理

f 為一對一且映成 $\Leftrightarrow$ 函數 f 具有反函數 f^{-1}. 若 f 具有反函數 f^{-1}，則此反函數是唯一的.

我們由定理可知具有反函數的函數恰為那些是一對一的函數. 設 f 為這種函數，則如何求 $f^{-1}(x)$ 呢？今列出三個步驟，如下：

步驟 1：寫成 $y=f(x)$.

步驟 2：求解方程式 $y=f(x)$ 的 x (以 y 表之).

步驟 3：x 與 y 互換，可得 $f^{-1}(x)$.

例題 2　求 $f(x)=\sqrt{2x-3}$ 的反函數，並繪反函數的圖形.

解　令 $\sqrt{2x-3}=y$，則 $2x-3=y^2$，

解得

$$x=\frac{y^2+3}{2}$$

將 x 與 y 互換可得

$$y=\frac{x^2+3}{2}$$

故

$$f^{-1}(x)=\frac{x^2+3}{2}$$

$$D_{f^{-1}}=R_f=[0,\ \infty)$$

圖形如圖 0-34 所示.

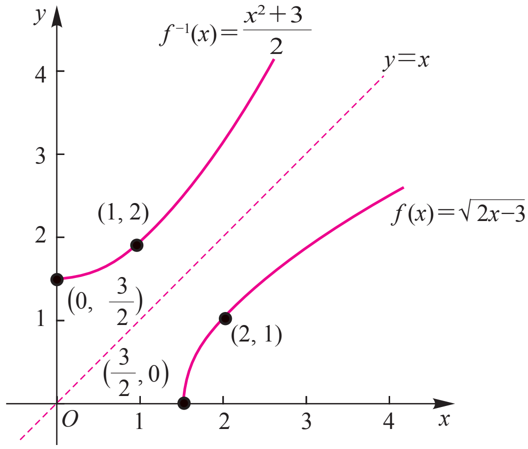


圖 0-34

0-8　三角函數

正銳角 θ 的正弦、餘弦、正切、餘切、正割與餘割定義為直角三角形之邊的比. 利用圖 0-35，這些三角函數之定義的形式為：

正弦函數　$\sin\theta=\dfrac{\theta\text{ 的對邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{y}{r}$

餘弦函數　$\cos\theta=\dfrac{\theta\text{ 的鄰邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{x}{r}$

正切函數　$\tan\theta=\dfrac{\theta\text{ 的對邊}}{\theta\text{ 的鄰邊}}=\dfrac{y}{x}$

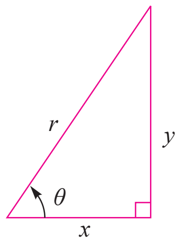


圖 0-35

餘切函數　$\cot\theta = \dfrac{\theta\text{ 的鄰邊}}{\theta\text{ 的對邊}} = \dfrac{x}{y}$

正割函數　$\sec\theta = \dfrac{\text{斜邊}}{\theta\text{ 的鄰邊}} = \dfrac{r}{x}$

餘割函數　$\csc\theta = \dfrac{\text{斜邊}}{\theta\text{ 的對邊}} = \dfrac{r}{y}$

註：三角函數的值僅與 θ 的大小有關，而與斜邊 r 的大小無關.

因直角三角形不可能有大於 90° 的角，故假使 θ 為鈍角，則上述定義中的三角函數不適用. 欲獲得適合所有 θ 角的三角函數的定義，我們取下列的方法：在 xy-平面上讓 θ 角位於標準位置，然後作出圓心在原點且半徑為 r 的圓，令該角的終邊與圓的交點為 $P(x,\ y)$，如圖 0-36 所示.

因此，我們給出下面的定義：

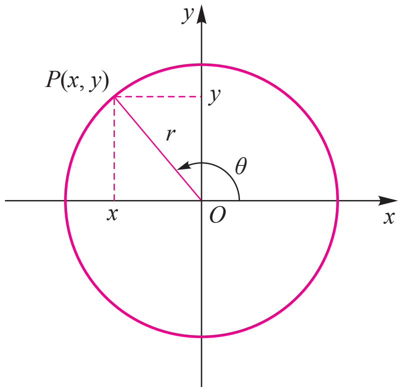


圖 0-36

定義 0-13

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\cot\theta = \frac{x}{y} \qquad \sec\theta = \frac{r}{x} \qquad \csc\theta = \frac{r}{y}$$

定義 0-13 適合所有的角——正角 (即，逆時鐘方向的角)、負角 (即，順時鐘方向的角)、銳角與鈍角. 若 θ 的終邊在 y-軸上，則 $\tan\theta$ 與 $\sec\theta$ 無定義 (因 $x=0$)，而若 θ 的終邊在 x-軸上，則 $\cot\theta$ 與 $\csc\theta$ 無定義 (因 $y=0$).

由於 r 恆為正，故 θ 角之三角函數的正、負號與 θ 所在象限有關，今列表如下：

函數＼象限	一	二	三	四
$\sin\theta$ $\csc\theta$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos\theta$ $\sec\theta$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\tan\theta$ $\cot\theta$	$+$	$-$	$+$	$-$

此外，

$$\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta},\quad \sec\theta=\frac{1}{\cos\theta},\quad \csc\theta=\frac{1}{\sin\theta},$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta},\quad \cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}.$$

在微積分裡，角是用弧度（或弳）來度量而不是用度、分與秒來度量，因它簡化了許多重要公式.

$$180^\circ=\pi \text{ 弧度} \approx 3.14159\cdots \text{ 弧度}$$

$$1^\circ=\frac{\pi}{180} \text{ 弧度} \approx 0.01745 \text{ 弧度}$$

$$1 \text{ 弧度}=\left(\frac{\pi}{180}\right)^\circ \approx 57^\circ 17' 44.8''$$

度	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

下面列舉一些常用的三角公式：

1. $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$，$1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$.

2. $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$，$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta$，$\sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\csc\theta$.

3. $\sin(-\theta)=-\sin\theta$，$\cos(-\theta)=\cos\theta$，$\tan(-\theta)=-\tan\theta$，
$\cot(-\theta)=-\cot\theta$，$\sec(-\theta)=\sec\theta$，$\csc(-\theta)=-\csc\theta$.

4. $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\ \cos\beta+\cos\alpha\ \sin\beta$,

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\ \cos\beta-\cos\alpha\ \sin\beta$,

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\ \cos\beta-\sin\alpha\ \sin\beta$,

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\ \cos\beta+\sin\alpha\ \sin\beta$.

5. $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$, $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta$.

6. $\sin\alpha\ \cos\beta=\dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$,

$\cos\alpha\ \cos\beta=\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$,

$\sin\alpha\ \sin\beta=\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$.

在微積分裡，角的大小通常用弧度表示，例如，$\sin 3$ 表示 3 弧度的正弦函數值. 因此，我們列出六個三角函數的定義域與值域及其圖形，如圖 0-37 所示.

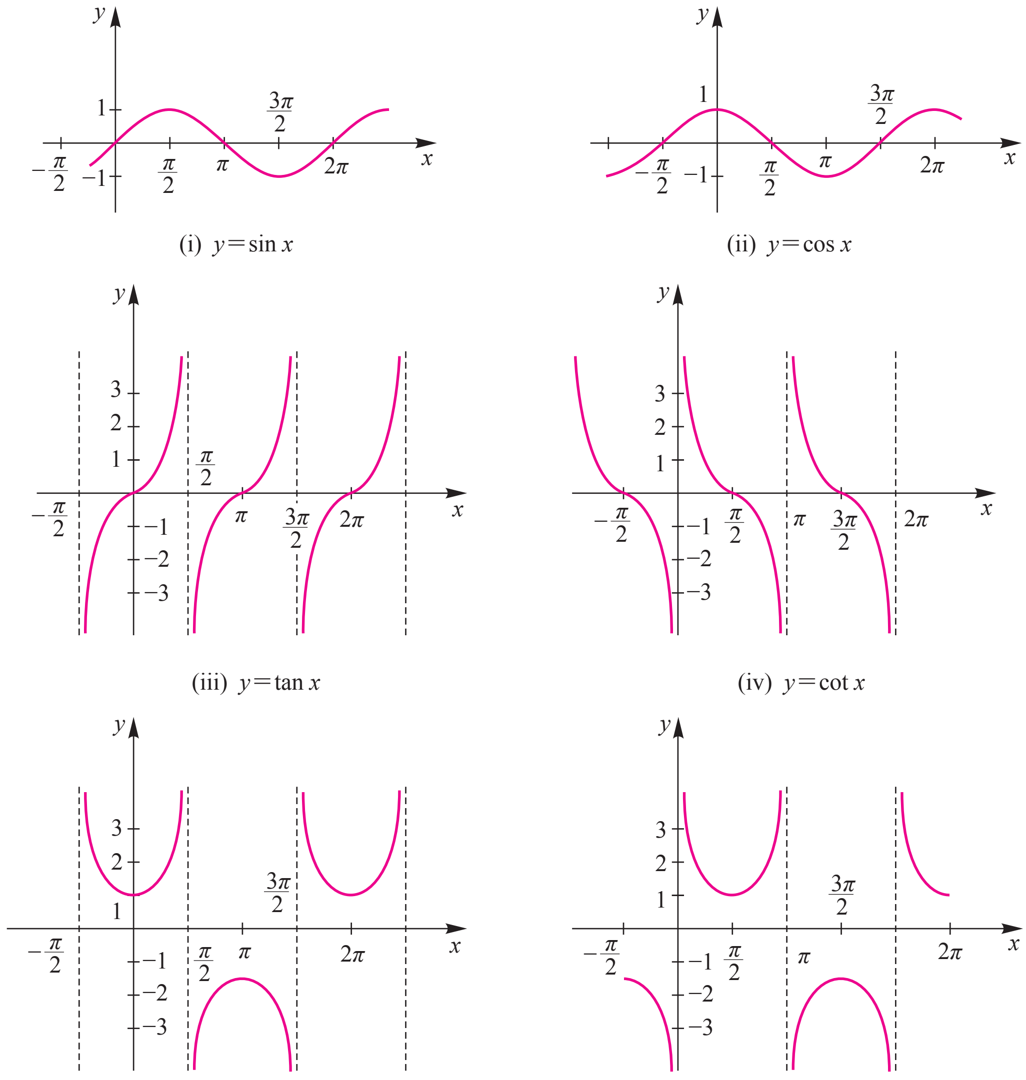
函數	定義域	值　域
$y=\sin x$	$\{x\mid x\in\mathbb{R}\}$	$\{y\mid -1\le y\le 1\}$
$y=\cos x$	$\{x\mid x\in\mathbb{R}\}$	$\{y\mid -1\le y\le 1\}$
$y=\tan x$	$\left\{x\ne\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\pi,\ n\in\mathbf{Z}\right\}$	$\{y\mid y\in\mathbb{R}\}$
$y=\cot x$	$\{x\mid x\ne n\pi,\ n\in\mathbf{Z}\}$	$\{y\mid y\in\mathbb{R}\}$
$y=\sec x$	$\left\{x\ne\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\pi,\ n\in\mathbf{Z}\right\}$	$\{y\mid y\le 1$ 或 $y\ge 1\}$
$y=\csc x$	$\{x\mid x\ne n\pi,\ n\in\mathbf{Z}\}$	$\{y\mid y\le 1$ 或 $y\ge 1\}$

定義 0-14

設 f 為定義於 $A\subset\mathbb{R}$ 的函數且 $f(A)\subset\mathbb{R}$，若存在一正數 p 使得

$$f(x+p)=f(x)$$

對於任一 $x\in A$ 皆成立，則稱 f 為**週期函數**，而使得上式成立的最小正數 p 稱為函數 f 的**週期**.



(i) $y = \sin x$　(ii) $y = \cos x$

(iii) $y = \tan x$　(iv) $y = \cot x$

(v) $y = \sec x$　(vi) $y = \csc x$

圖 0-37

定理 0-8

若 p 為 $f(x)$ 所定義函數的週期，則 $f(kx)$ 所定義的函數亦為週期函數，其週期為 $\dfrac{p}{k}$ $(k > 0)$.

例題 1　求 $f(x)=\dfrac{\sin x+1}{2\sin x-1}$ 的定義域與值域.

解　令

$$y=f(x)=\frac{\sin x+1}{2\sin x-1} \cdots\cdots\cdots ①$$

因 $2\sin x-1\neq 0$，即 $\sin x\neq\dfrac{1}{2}$，故

$$x\neq n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6},\ n\in\mathbb{Z}.$$

所以，f 的定義域為 $D_f=\left\{x\,\middle|\,x\in\mathbb{R} \text{ 且 } x\neq n\pi+(-1)^n\dfrac{\pi}{6},\ n\in\mathbb{Z}\right\}$.

由 ① 式得　$2y\sin x-y=\sin x+1$

即，　$(2y-1)\sin x=y+1$

故　$\sin x=\dfrac{y+1}{2y-1}$，$y\neq\dfrac{1}{2}$

因 $|\sin x|\leq 1$，故 $\left|\dfrac{y+1}{2y-1}\right|\leq 1$，可得 $y(y-2)\geq 0$，故 $y\geq 2$ 或 $y\leq 0$.

因此，f 的值域為 $R_f=\{y\,|\,y\geq 2 \text{ 或 } y\leq 0\}$.

例題 2　求 $f(x)=\tan\left(3x+\dfrac{\pi}{5}\right)$ 的定義域與週期.

解　因

$$3x+\frac{\pi}{5}\neq n\pi+\frac{\pi}{2}\ (n\in\mathbb{Z})$$

即，

$$x\neq\frac{n\pi}{3}+\frac{\pi}{10}$$

故 f 的定義域為 $D_f=\left\{x\,\middle|\,x\in\mathbb{R} \text{ 且 } x\neq\dfrac{n\pi}{3}+\dfrac{\pi}{10},\ n\in\mathbb{Z}\right\}$

$$f\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\tan\left[3\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{5}\right]=\tan\left(3x+\pi+\frac{\pi}{5}\right)$$

$$=\tan\left(\pi+\left(3x+\frac{\pi}{5}\right)\right)=\tan\left(3x+\frac{\pi}{5}\right)=f(x)$$

即，$f\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=f(x)$. 因此，$f$ 的週期為 $\frac{\pi}{3}$.

例題 3 作 $y=\frac{3}{2}\sin 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的圖形.

解 函數的值域為 $\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$，週期為 $\frac{2\pi}{2}=\pi$.

我們先將 $y=\frac{3}{2}\sin 2x$ 的圖形描出，然後向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 即可得 $y=\frac{3}{2}\sin 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的圖形，如圖 0-38 所示.

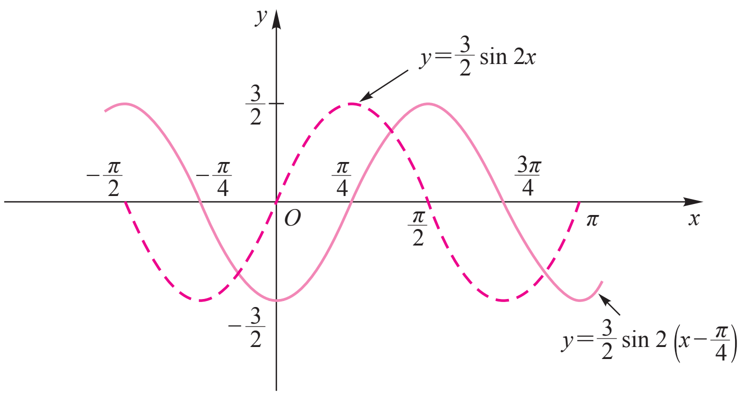


圖 0-38

0-9　反三角函數

因三角函數是週期函數，不為一對一函數，故它們沒有反函數. 若想使三角函數的逆對應符合函數關係，我們須將三角函數的定義域加以限制，以使三角函數成為一對一

的映成函數，如此我們的逆對應就能符合一對一．我們在限制條件下建立三角函數的反函數，也就是反三角函數.

定義 0-15

反正弦函數，記為 $\sin^{-1}$，定義如下：

$$\sin^{-1}x=y \Leftrightarrow \sin\ y=x$$

其中 $-1\leq x\leq 1$ 且 $-\dfrac{\pi}{2}\leq y\leq \dfrac{\pi}{2}$.

反餘弦函數，記為 $\cos^{-1}$，定義如下：

$$\cos^{-1}x=y \Leftrightarrow \cos\ y=x$$

其中 $-1\leq x\leq 1$ 且 $0\leq y\leq \pi$.

反正切函數，記為 $\tan^{-1}$，定義如下：

$$\tan^{-1}x=y \Leftrightarrow \tan\ y=x$$

其中 $-\infty<x<\infty$ 且 $-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}$.

反餘切函數，記為 $\cot^{-1}$，定義如下：

$$\cot^{-1}x=y \Leftrightarrow \cot\ y=x$$

其中 $-\infty<x<\infty$，$0<y<\pi$.

反正割函數，記為 $\sec^{-1}$，定義如下：

$$\sec^{-1}x=y \Leftrightarrow \sec\ y=x$$

其中 $|x|\geq 1$，$0\leq y<\dfrac{\pi}{2}$ 或 $\pi\leq y<\dfrac{3\pi}{2}$.

反餘割函數，記為 $\csc^{-1}$，定義如下：

$$\csc^{-1}x=y \Leftrightarrow \csc\ y=x$$

其中 $|x|\geq 1$，$0<y\leq \dfrac{\pi}{2}$ 或 $\pi<y\leq \dfrac{3\pi}{2}$.

六個反三角函數的圖形如圖 0-39 所示.

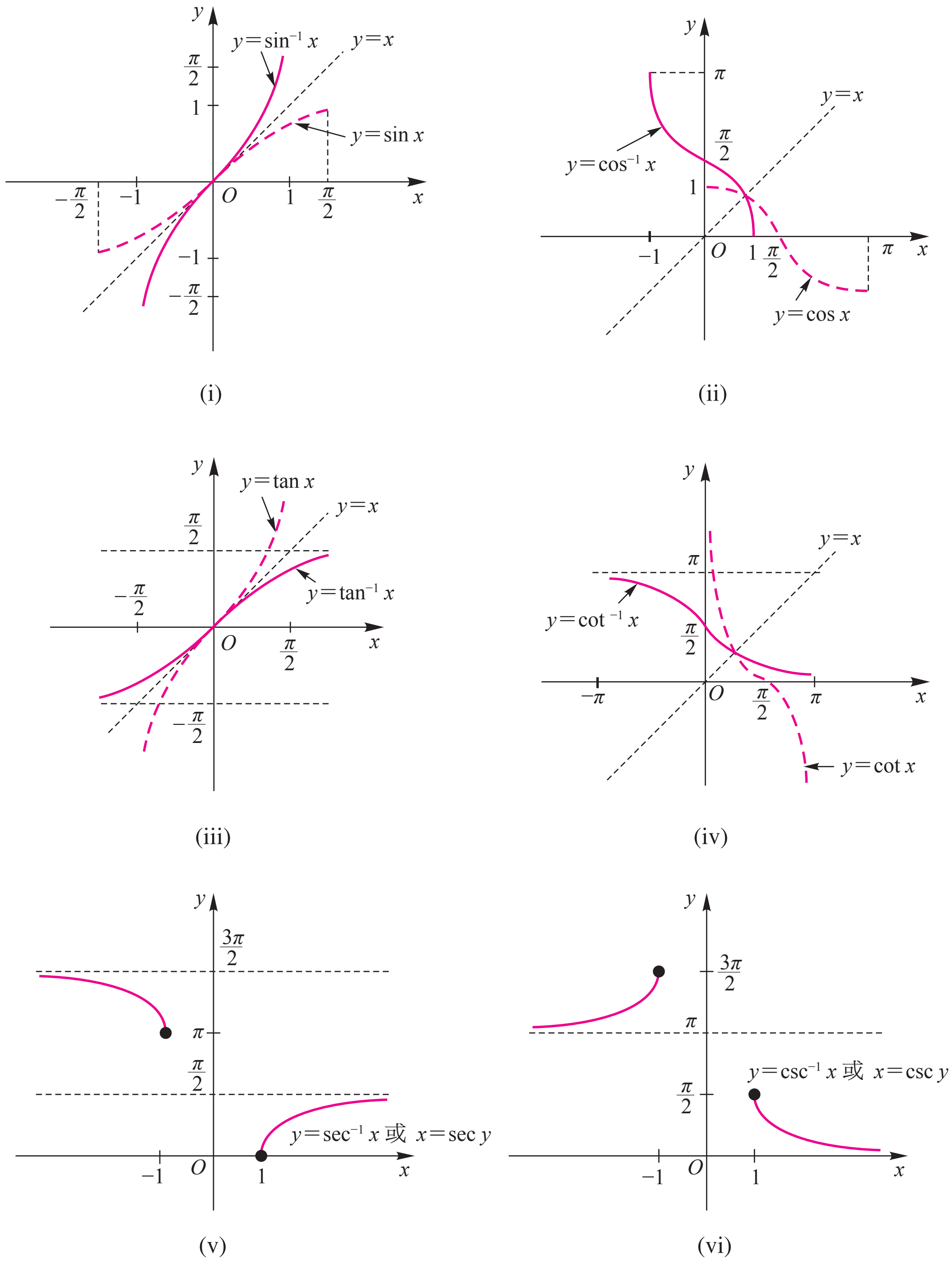


圖 0-39

註：1. 符號 $\sin^{-1} x$ 絕不是用來表示 $\dfrac{1}{\sin x}$，若需要，$\dfrac{1}{\sin x}$ 可寫成 $(\sin x)^{-1}$ 或 $\csc x$. $\sin^{-1}$ 唸成 "arcsine".

2. 為了定義 $\sin^{-1} x$，我們將 $\sin x$ 的定義域限制在區間 $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 而得到一對一且映成的函數. 此外，有其它的方法限制 $\sin x$ 的定義域而得到一對一且映成的函數；例如，我們或許需要 $\dfrac{3\pi}{2} \le x \le \dfrac{5\pi}{2}$ 或 $-\dfrac{5\pi}{2} \le x \le -\dfrac{3\pi}{2}$. 然而，習慣上選取 $-\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}$.

3. 對於 $\sec^{-1} x$ (或 $\csc^{-1} x$) 的定義沒有一致的看法. 例如，有些作者限制 x 使得 $0 \le x < \dfrac{\pi}{2}$ 或 $\dfrac{\pi}{2} < x \le \pi$ 來定義 $\sec^{-1} x$.

例題 1　求 $f(x) = \sin^{-1}(2x^2 - x)$ 的定義域與值域.

解　因 $-1 \le 2x^2 - x \le 1$，故

(i) 當 $2x^2 - x \le 1$ 時，$2x^2 - x - 1 \le 0$，可得 $(2x+1)(x-1) \le 0$，所以，$-\dfrac{1}{2} \le x \le 1$.

(ii) 當 $2x^2 - x \ge -1$ 時，$2x^2 - x + 1 \ge 0$，可得 $2\left(x - \dfrac{1}{4}\right)^2 + \dfrac{7}{8} \ge 0$，

即 $\forall\, x \in \mathbb{R}$，$2x^2 - x + 1 \ge 0$ 成立.

由 (i) 與 (ii) 得 $-\dfrac{1}{2} \le x \le 1$，所以，$f$ 的定義域為

$$D_f = \left\{ x \,\middle|\, -\frac{1}{2} \le x \le 1 \right\}$$

令 $y = \sin^{-1}(2x^2 - x)$. 因 $-1 \le 2x^2 - x \le 1$，故

$$-\frac{\pi}{2} \le \sin^{-1}(2x^2 - x) \le \frac{\pi}{2}，\text{即 } -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}.$$

因此，f 的值域為 $D_f=\left\{y \,\middle|\, -\dfrac{1}{2}\le y\le 1\right\}$.

例題 2 求 (1) $\sin\left(\sin^{-1}\dfrac{2}{3}\right)$　　(2) $\sin\left[\sin^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right]$

(3) $\sin^{-1}\left(\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$　　(4) $\sin^{-1}\left(\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$

解 (1) 因 $\dfrac{2}{3}\in[-1,\ 1]$，故 $\sin\left(\sin^{-1}\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{2}{3}$.

(2) 因 $-\dfrac{1}{2}\in[-1,\ 1]$，故 $\sin\left[\sin^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right]=-\dfrac{1}{2}$.

(3) 因 $\dfrac{\pi}{4}\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$，故 $\sin^{-1}\left(\sin\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi}{4}$.

(4) $\sin^{-1}\left(\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)=\sin^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\pi}{3}$.

例題 3 求 (1) $\tan\left(\sin^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$　　(2) $\cos\left(\sin^{-1}\dfrac{4}{5}\right)$

(3) $\sin\left(2\sin^{-1}\dfrac{3}{5}\right)$　　(4) $\cos\left[\cos^{-1}\dfrac{4}{5}+\cos^{-1}\left(-\dfrac{5}{13}\right)\right]$

解 (1) $\tan\left(\sin^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\tan\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$.

(2) 設 $\theta=\sin^{-1}\dfrac{4}{5}$，則 $\sin\theta=\dfrac{4}{5}$.

由於 $\theta\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$，可知 $\cos\theta\ge 0$，

故
$$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$$

即，
$$\cos\left(\sin^{-1}\frac{4}{5}\right)=\frac{3}{5}.$$

(3) $\sin\left(2\sin^{-1}\dfrac{3}{5}\right)=2\sin\left(\sin^{-1}\dfrac{3}{5}\right)\cos\left(\sin^{-1}\dfrac{3}{5}\right)$

$$=(2)\left(\frac{3}{5}\right)\left(\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}\right)=(2)\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)=\frac{24}{25}.$$

(4) 設 $\alpha=\cos^{-1}\dfrac{4}{5}$，則 $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$，α 在第一象限，可得

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$$

又設 $\beta=\cos^{-1}\left(-\dfrac{5}{13}\right)$，則 $\cos\beta=-\dfrac{5}{13}$，β 在第二象限，可得

$$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\left(-\frac{5}{13}\right)^2}=\frac{12}{13}$$

故

$$\cos\left[\cos^{-1}\frac{4}{5}+\cos^{-1}\left(-\frac{5}{13}\right)\right]$$

$$=\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$=\left(\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{5}{13}\right)-\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{12}{13}\right)=-\frac{56}{65}.$$

例題 4　試證：$\cos(2\tan^{-1}x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

解　令 $\theta=\tan^{-1}x$，則

$$\cos(2\tan^{-1}x)=\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=\frac{2}{\sec^2\theta}-1$$

$$=\frac{2}{1+\tan^2\theta}-1=\frac{2}{1+x^2}-1=\frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

三角函數與反三角函數的合成函數有下列關係：

$$\begin{cases}\sin(\sin^{-1}x)=x, & \forall x\in[-1, 1]\\[2mm] \sin^{-1}(\sin x)=x, & \forall x\in\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]\end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(\cos^{-1} x) = x, & \forall\, x \in [-1,\ 1] \\ \cos^{-1}(\cos x) = x, & \forall\, x \in [0,\ \pi] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan(\tan^{-1} x) = x, & \forall\, x \in \mathbb{R} \\ \tan^{-1}(\tan x) = x, & \forall\, x \in \left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cot(\cot^{-1} x) = x, & \forall\, x \in \mathbb{R} \\ \cot^{-1}(\cot x) = x, & \forall\, x \in (0,\ \pi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sec(\sec^{-1} x) = x, & \forall\ |x| \geq 1 \\ \sec^{-1}(\sec x) = x, & \forall\, x \in \left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi,\ \dfrac{3\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \csc(\csc^{-1} x) = x, & \forall\ |x| \geq 1 \\ \csc^{-1}(\csc x) = x, & \forall\, x \in \left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right] \cup \left(\pi,\ \dfrac{3\pi}{2}\right] \end{cases}$$

定理 0-9

(1) $\sin^{-1} x = \csc^{-1} \dfrac{1}{x}$, $\cos^{-1} x = \sec^{-1} \dfrac{1}{x}$, $\forall\, |x| \leq 1$ 但 $x \neq 0$.

(2) $\csc^{-1} x = \sin^{-1} \dfrac{1}{x}$, $\sec^{-1} x = \cos^{-1} \dfrac{1}{x}$, $\forall\, |x| \geq 1$.

(3) $\tan^{-1} x = \cot^{-1} \dfrac{1}{x}$, $\cot^{-1} x = \tan^{-1} \dfrac{1}{x}$, $\forall\, x > 0$.

(4) $\tan^{-1} x = \cot^{-1} \dfrac{1}{x} - \pi$, $\cot^{-1} x = \tan^{-1} \dfrac{1}{x} + \pi$, $\forall\, x < 0$.

定理 0-10

(1) $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\dfrac{\pi}{2}$，$\forall\, x\in[-1,\ 1]$.

(2) $\tan^{-1}x+\cot^{-1}x=\dfrac{\pi}{2}$，$\forall\, x\in \mathbb{R}$.

(3) $\sec^{-1}x+\csc^{-1}x=\dfrac{\pi}{2}$，$\forall\, |x|\geq 1$.

證明　(1) 令 $\alpha=\sin^{-1}x$，$\beta=\cos^{-1}x$，則 $\sin\alpha=x$，$\cos\beta=x$，

此處 $-\dfrac{\pi}{2}\leq\alpha\leq\dfrac{\pi}{2}$，$0\leq\beta\leq\pi$.

因 $x=\sin\alpha=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\beta$，又 $0\leq\dfrac{\pi}{2}-\alpha\leq\pi$，故

$\dfrac{\pi}{2}-\alpha=\beta$，可得 $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$，即 $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\dfrac{\pi}{2}$.

其餘留給讀者自證.

0-10　指數函數

我們先回溯一下已學過的一般指數函數.

定義 0-16

若 $a>0$ 且 $a\neq 1$，則函數 $y=a^x$ 稱為以 a 為底且 x 為指數的**一般指數函數**.

一般指數函數 $y=a^x$ 具有下列的特性：

1. 定義域為 $(-\infty, \infty)$，值域為 $(0, \infty)$.
2. 它是一對一函數.
3. 它的圖形必通過點 $(0, 1)$.
4. 若 $a>1$，則函數在 $(-\infty, \infty)$ 為遞增；若 $0<a<1$，則函數在 $(-\infty, \infty)$ 為遞減. 圖形如圖 0-40 所示.

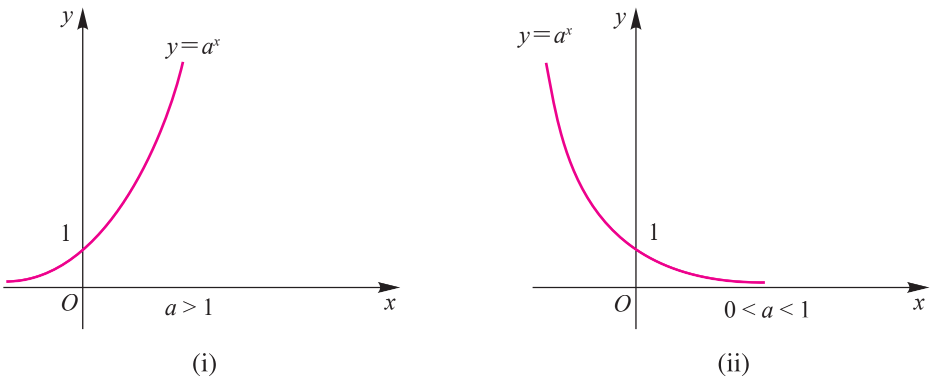


圖 0-40

例題 1 作函數 $y=2^x$ 與 $y=2^{-x}$ 的圖形.

解

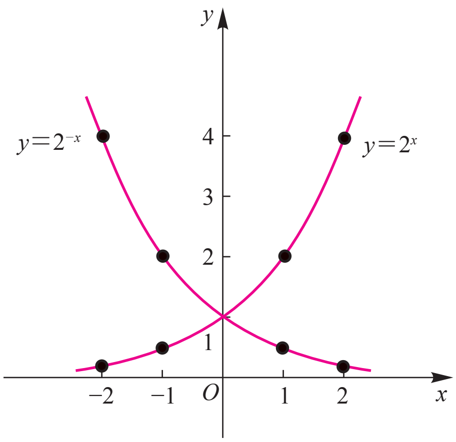


圖 0-41

定理 0-11　指數律

設 a、$b>0$ 且 x、$y\in\mathbb{R}$，則

(1) $a^{x+y}=a^x a^y$　(2) $a^{x-y}=\dfrac{a^x}{a^y}$　(3) $(a^x)^y=a^{xy}$　(4) $(ab)^x=a^x b^x$.

函數 $y=(1+x)^{1/x}$ 的圖形示於圖 0-42 中，若利用計算機計算 $(1+x)^{1/x}$ 是很有幫助的，一些近似值列於下表：

x	$(1+x)^{1/x}$	x	$(1+x)^{1/x}$
0.1	2.593742	-0.1	2.867972
0.01	2.704814	-0.01	2.731999
0.001	2.716924	-0.001	2.719642
0.0001	2.718146	-0.0001	2.718418
0.00001	2.718268	-0.00001	2.718295
0.000001	2.718280	-0.000001	2.718283

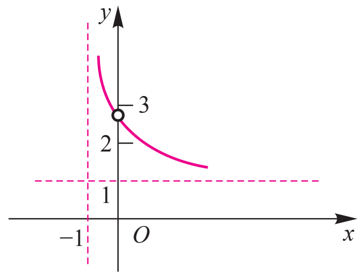


圖 0-42

由表中可以看出，當 $x\to 0$ 時，$(1+x)^{1/x}$ 趨近一個定數，這個定數是一個無理數，記為 e，稱為**自然底數**其值約為 $2.71828\cdots$.

定義 0-17

$$e=\lim(1+x)^{1/x}\ \text{或}\ e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

以 e 為底數的指數函數 $y=e^x=\exp(x)$ 稱為**自然指數函數**.

例題 2　作函數 $y=e^x$ 與 $y=e^{-x}$ 的圖形.

解

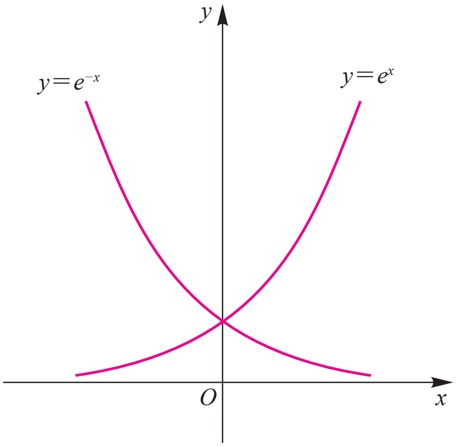


圖 0-43

定理 0-12 指數律

(1) $e^{x+y}=e^x e^y$ (2) $e^{x-y}=\dfrac{e^x}{e^y}$ (3) $(e^x)^y=e^{xy}$.

0-11 對數函數

由於指數函數為一對一且映成的函數，所以其反函數存在．我們定義指數函數的反函數為對數函數．

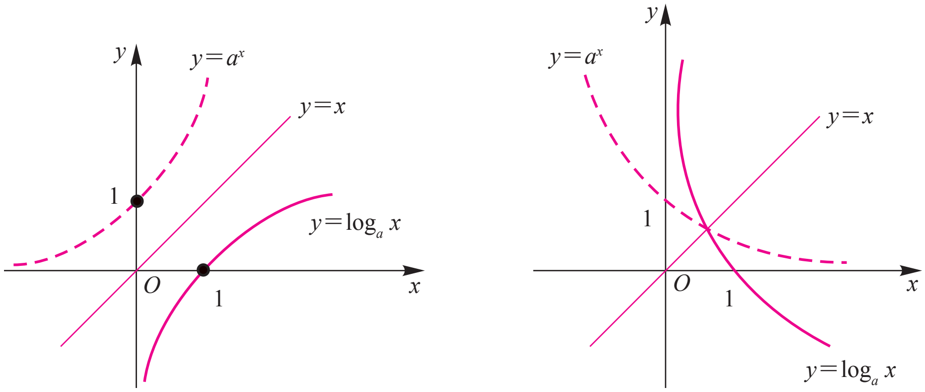
定義 0-18

$$y=\log_a x \Leftrightarrow x=a^y \quad (a>0,\ a\neq 1)$$

y 稱為以 a 為底的**對數函數**.

一般對數函數 $y=\log_a x$ 的定義域為 $(0,\ \infty)$，值域為 $(-\infty,\ \infty)$，且具有下列的特性：

1. 它是一對一函數.
2. 它的圖形必通過點 $(1,\ 0)$.
3. 若 $a>1$，則函數在 $(0,\ \infty)$ 為遞增；若 $0<a<1$，則函數在 $(0,\ \infty)$ 為遞減. 圖形如圖 0-44 所示.



(i)　(ii)

圖 0-44

以 e 為底的對數稱為**自然對數**，記為 ln. 於是，$\ln x=\log_e x$，$y=\ln x$ 稱為**自然對數函數**.

由於指數函數與對數函數互為反函數，故可得出下列兩個關係式：

定理 0-13

$$a^{\log_a x}=x,\quad \forall\, x>0$$

$$\log_a a^x=x,\quad \forall\, x\in \mathbb{R}.$$

註：在定理 0-13 中，若 a 換成 e，則關係亦成立.

定理 0-14

設 $a>0$，$a\neq 1$，$x>0$，$y>0$，則

(1) $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$

(2) $\log_a \dfrac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$

(3) $\log_a x^r=r\log_a x$，$r\in\mathbb{R}$.

定理 0-15

設 $x>0$，$y>0$，則

(1) $\ln(xy)=\ln x+\ln y$　(2) $\ln\dfrac{x}{y}=\ln x-\ln y$　(3) $\ln x^r=r\ln x$，$r\in\mathbb{R}$.

定理 0-16　換底公式

設 $a>0$，$a\neq 1$，$b>0$，$b\neq 1$，$c>0$，則 $\log_a c=\dfrac{\log_b c}{\log_b a}$.

定理 0-17

設 $a>0$，$x\in\mathbb{R}$，則 $a^x=e^{x\ln a}$.

例題 1　試證：$f(x)=2+e^x$ 與 $g(x)=\ln(x-2)$ 互為反函數.

解　$f(g(x))=2+e^{g(x)}=2+e^{\ln(x-2)}=2+x-2=x$，$\forall\, x>2$.

$g(f(x))=\ln(f(x)-2)=\ln(2+e^x-2)=\ln e^x=x$，$\forall\, x\in\mathbb{R}$.

故 $f(x)$ 與 $g(x)$ 互為反函數.

例題 2　求函數 $f(x)=3^{x+2}$ 的反函數.

解　令 $y=f(x)=3^{x+2}$，則 $x+2=\log_3 y$，故 $x=-2+\log_3 y$.

x 與 y 互換，可得 $y=-2+\log_3 x$，故 $f^{-1}(x)=-2+\log_3 x$.

例題 3　(1) 試證函數 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 為奇函數；(2) 求 f 的反函數.

解　(1) 我們必須證明 $-f(x)=f(-x)$

因 $-f(x)=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})=\ln[(x+\sqrt{x^2+1})^{-1}]=\ln\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$

$$=\ln\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x-\sqrt{x^2+1}}\right)=\ln\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x^2-x^2-1}$$

$$=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)=f(-x)$$

故 f 為奇函數.

(2) 令 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，則 $e^y=x+\sqrt{x^2+1}$，可得

$$(e^y-x)^2=x^2+1$$

即，$$e^{2y}-2xe^y+x^2=x^2+1,\quad 2xe^y=e^{2y}-1$$

故 $$x=\frac{e^{2y}-1}{2e^y}=\frac{1}{2}(e^y-e^{-y})$$

於是，反函數為 $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$.